

Više dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti

Šefket Arslanagić¹, Ingmar Lehmann

Dokazivanje nejednakosti ima vrlo važnu ulogu u nastavi matematike raznih nivoa. Tu često dolaze do izražaja razne ideje te veoma zanimljivi dokazi nejednakosti u kojima se koriste nejednakosti o sredinama, nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakovskog kao i nejednakosti Čebiševa, Höldera, Minkovskog, Schura, Jensena, Huygensa i ostale.

U ovom članku ćemo dati više raznih dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti koja glasi

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 5; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

Dokaz 1. Za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$, te:

$$\frac{1}{\sin x} > 1 \quad (2)$$

Dalje imamo, zbog nejednakosti $A \geq G$, između aritmetičke i geometrijske sredine,

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \geq 2\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = 2$$

tj.

$$\frac{1}{\sin x \cos x} \geq 2 \quad (3)$$

Sada zbog (2) i (3) dobivamo:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 1 + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} > 1 + 1 + 1 + 2 = 5.$$

Dokaz 2. Opet, koristeći nejednakost $A \geq G$ dobivamo,

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) > \sqrt{1 \cdot \frac{1}{\sin x}} \iff 1 + \frac{1}{\sin x} > 2\sqrt{\frac{1}{\sin x}} \quad (4)$$

te slično

$$1 + \frac{1}{\cos x} > 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} \quad (5)$$

Ovdje vrijedi samo znak $>$, a ne \geq jer je $1 \neq \frac{1}{\sin x}$ i $1 \neq \frac{1}{\cos x}$, tj. $\sin x \neq 1$ i $\cos x \neq 1$ za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Nakon množenja (4) i (5) imamo:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 4\sqrt{\frac{1}{\sin x \cos x}} > 4\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}. \quad (6)$$

¹ Izvanredni je profesor u miru s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Sarajevu;
e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba

Kako je $0 < \sin 2x < 1$ za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, imamo:

$$\frac{1}{\sin 2x} > 1 \iff \frac{2}{\sin 2x} > 2 \iff \sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} > \sqrt{2} \iff 4\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} > 4\sqrt{2} > 5. \quad (7)$$

Sada iz (6) i (7) vrijedi (1).

Dokaz 3. Dana nejednakost je ekvivalentna nejednakosti (nakon množenja na lijevoj strani od (1)):

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} > 4 \iff \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x \cos x} > 4 \quad (8)$$

Koristeći supstituciju $\sin x + \cos x = t$, te odavde

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2 \iff \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2},$$

nejednakost (8) postaje:

$$\frac{t+1}{\frac{t^2-1}{2}} > 4 \iff \frac{1}{t-1} > 2 \iff \frac{2t-3}{t-1} < 0 \iff 1 < t < \frac{3}{2}. \quad (9)$$

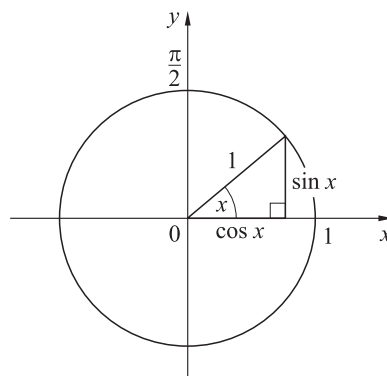
Dalje imamo

$$\begin{aligned} t &= \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

te

$$t = \sin x + \cos x > 1.$$

Zbog nejednakosti trokuta to znači da nejednakost (9) vrijedi, tj. i (8) vrijedi, pa onda i (1).



Dokaz 4. Koristit ćemo supstituciju:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Sada nejednakost (1), uzimajući $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ima oblik:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1+t^2}{2t}\right) \left(1 + \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) &> 5 \iff \frac{t^2 + 2t + 1}{2t} \cdot \frac{2}{1-t^2} > 5 \\ \iff \frac{t+1}{t(1-t)} - 5 > 0 &\iff \frac{5t^2 - 4t + 1}{t(1-t)} > 0 \iff \frac{5 \left[\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25} \right]}{t(1-t)} > 0, \end{aligned}$$

što vrijedi zbog $0 < t < 1$. Dakle, dana nejednakost (1) vrijedi.

Dokaz 5. Koristit ćemo pravokutni trokut ABC kod kojeg je $\angle ACB = 90^\circ$, a jedan od šijastih kutova je jednak x ; $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i visina iz vrha C pravokutnog kuta iznosi $|CD| = 1$.

Neka je $\angle CAD = x$ kao i $\angle BCD = x$ (jer su trokuti ACD i CBD slični). Tada je:

$$\triangle ACD : \sin x = \frac{1}{b} \implies b = \frac{1}{\sin x},$$

$$\triangle BCD : \cos x = \frac{1}{a} \implies a = \frac{1}{\cos x}$$

kao i

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 = b^2 + a^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \\ \implies |AB|^2 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \implies c (= |AB|) = \frac{1}{\sin x \cos x}. \end{aligned}$$

Dana nejednakost (1) je ekvivalentna sa

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} > 4. \quad (10)$$

Radi nejednakosti trokuta imamo

$$a + b > c \quad (11)$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} > \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Kako je \overline{CM} (točka M je polovište hipotenuze trokuta ABC) težišnica tog trokuta, a ujedno i polumjer opisane kružnice trokuta ABC , imamo $|AB| = 2|CM|$, tj. $c = 2m_c (= 2R)$. Iz pravokutnog trokuta CDM slijedi $|CM| \geq |CD|$, a odatle $|CM| \geq 1$ ili $m_c (= R) \geq 1$. Dakle, dobivamo

$$c \geq 2. \quad (12)$$

Sada iz (11) i (12) dobivamo

$$a + b + c > 4 \iff \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} > 4,$$

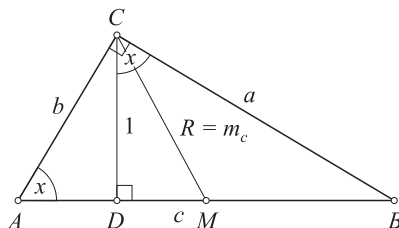
a ovo je nejednakost (10). Ovime je nejednakost (1) dokazana.

Dokaz 6. Koristeći nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakovskog imamo

$$\begin{aligned} \left[1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)^2\right] \left[1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)^2\right] &\geq \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)^2 \\ \iff \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) &\geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}}\right)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Kako je $\sin 2x < 1$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to je $\sqrt{\sin 2x} < 1$, a odatle $\frac{1}{\sqrt{\sin 2x}} > 1$ i

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} > \sqrt{2}. \quad (14)$$



Sada iz (13) i (14) dobivamo:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \geq (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad (15)$$

a oдавде zbog $3 + 2\sqrt{2} > 5$ ($\iff \sqrt{2} > 1$) slijedi nejednakost (1).

Napomena 1. Uočimo da je nejednakost (15) bolja od dane nejednakosti (1).

Jednakost u (15) vrijedi ako i samo ako je $\frac{1}{1} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}} \implies \operatorname{ctg} x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4}$.

Dokaz 7. Za ovaj dokaz ćemo koristiti diferencijalni račun. Promatramo funkciju

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} - 5, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Imamo

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x},$$

tj.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\cos^3 x + \sin^3 x - \cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{-(\cos^3 x - \sin^3 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x}, \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x + \cos x + \sin x)}{\sin^2 x \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Iz $f'(x) = 0$ dobivamo:

$$\sin x - \cos x = 0,$$

a oдавде

$$\operatorname{tg} x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4}.$$

Imamo sada

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad f \text{ pada} \\ = 0, & x = \frac{\pi}{4}, \quad \text{min} \\ > 0, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f \text{ raste,} \end{cases}$$

te

$$f_{\min} = f\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 + 2\sqrt{2} > 5,$$

tj.

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 5.$$

Dokaz 8. Koristit ćemo Huygensovu³ nejednakost koja glasi:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})^n; \quad (x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n) \quad (16)$$

³ Cristian Huygens (1639. – 1695.), poznati nizozemski matematičar i fizičar (dugo vremena je živio u Parizu).

Za $x_1 = \frac{1}{\sin x}$, $x_2 = \frac{1}{\cos x}$ i $n = 2$, iz (13) dobivamo:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) &\geq \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) &\geq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}\right)^2, \end{aligned}$$

a odavde, zbog objašnjenja danog u dokazu 6, imamo

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \geq (1 + \sqrt{2})^2,$$

tj.

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2} (> 5).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$, tj. $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ jer $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Na kraju ćemo dati još jedno zanimljivo poopćenje nejednakosti (1).

Ako je kut x šiljast, tj. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ te $a \geq 0$ i $b \geq 0$, tada vrijedi

$$\left(a + \frac{b}{\sin x}\right) \left(b + \frac{a}{\cos x}\right) > a^2 + b^2 + 3ab.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{b}{\sin x}\right) \left(b + \frac{a}{\cos x}\right) &= ab + \frac{a^2}{\cos x} + \frac{b^2}{\sin x} + \frac{ab}{\sin x \cos x} \\ &= ab + \frac{a^2}{\cos x} + \frac{b^2}{\sin x} + \frac{2ab}{\sin 2x}. \end{aligned} \tag{17}$$

Kako je za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$0 < \sin x < 1, \quad 0 < \cos x < 1 \quad \text{i} \quad 0 < \sin 2x < 1,$$

to je

$$\frac{1}{\sin x} > 1, \quad \frac{1}{\cos x} > 1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sin 2x} > 1,$$

odnosno

$$\frac{a^2}{\cos x} > a^2, \quad \frac{b^2}{\sin x} > b^2 \quad \text{i} \quad \frac{2ab}{\sin 2x} > 2ab,$$

pa iz (17) dobivamo:

$$\left(a + \frac{b}{\sin x}\right) \left(b + \frac{a}{\cos x}\right) > a^2 + b^2 + 3ab.$$

Za $a = b = 1$, dobivamo nejednakost (1).

Dat ćemo na kraju još jedno bolje poopćenje dane nejednakosti (1). Ono glasi:

Ako je kut x šiljast, tj. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi nejednakost:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^n x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos^n x}\right) \geq \left(1 + 2^{\frac{n}{2}}\right)^2.$$

Dokaz. Nakon množenja i kvadriranja nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{1}{\sin^n x} + \frac{1}{\cos^n x} + \frac{1}{\sin^n x \cdot \cos^n x} \geq 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 2^n. \quad (18)$$

Sada je zbog $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{1}{\sin^n x \cdot \cos^n x} = \frac{2^n}{(2 \sin x \cos x)^n} = \frac{2^n}{\sin^n 2x} \geq 2^n \quad (19)$$

te na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja:

$$\frac{1}{\sin^n x} + \frac{1}{\cos^n x} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\sin^n x \cdot \cos^n x}} \geq 2 \sqrt{2^n} = 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}. \quad (20)$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (19) i (20), dobivamo nejednakost (18), odnosno danu nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sin^n 2x = 1$ te $\frac{1}{\sin^n x} = \frac{1}{\cos^n x}$, a odavde $\sin 2x = 1$ te $\sin x = \cos x$, tj. za $x = \frac{\pi}{4}$.

Za $n = 1$ dana nejednakost glasi:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \geq (1 + \sqrt{2})^2,$$

tj.

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2} > 5.$$

Jednakost vrijedi za $x = \frac{\pi}{4}$.

Mišljenja smo da se u ovih sedam dokaza i dva poopćenja koristi više zanimljivih i korisnih ideja, kako smo to tvrdili u početku, koje će biti od interesa budućim čitateljima ovog članka, pogotovo učenicima (a i studentima) koji pokazuju veći interes za matematiku kao i nastavnicima koji s njima rade.

Literatura

- [1] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- [2] Š. ARSLANAGIĆ, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
- [3] A. ENGEL, *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.